L'été dernier Marie Milis a été invitée à participer au congrès international d'*IRIS* (Interdisciplinary Research on Imagery and Sight). Les membres d'*IRIS* sont des chercheurs engagés dans des disciplines de recherche variées: astrophysicien, neurologue, philosophe, médiéviste, etc. A partir d'un thème choisi en commun, ils glânent durant l'année des observations sur la façon dont celui-ci est vécu dans la discipline propre à chacun.

A Bruges cette année tous les exposés s'articulaient autour d'*Un Autre Regard*. Marie Milis y a présenté la place du visuel en mathématiques.

(L.A.)

UNE AVENTURE INTERIEURE: APPRENDRE A VOIR EN MATHEMATIQUES

Marie Milis

Après une formation de mathématicienne, j'ai choisi de porter l'accent de ma recherche sur les trajets du sens en mathématiques. Aussi, j'accompagne des enfants de 12 à 22 ans en échec scolaire. Nous sommes co-chercheurs: eux cherchent à comprendre les math, moi j'observe leurs parcours. J'anime des ateliers de mathématiques pour jeunes et adultes: professeurs en formation, parents, adultes en souffrance du traumatisme des math ou en nostalgie de ce qu'elles auraient pu être.

C'est en observant ce que mes élèves écrivent et disent pour se justifier que me sont apparues les thèses que j'expose ici. Elles ne sont pour moi que des hypothèses de recherche: ce qui me paraît le plus adéquat pour saisir la place du visuel en math...mais cela peut changer ou tout au moins évoluer.

Je suis, comme tout chercheur, un être en quête de sens, qui se met à la disposition des interrogations et des découvertes que

*) Les différentes écritures présentées ici sont celles des participants au colloque. Une telle variété d'écritures pour un même énoncé est toujours le cas lors d'un travail en groupe.

mon champ d'investigation stimule. J'ai mis ces hypothèses à l'épreuve de plusieurs feux, auprès d'une philosophe des sciences, d'une psychanalyste, d'un graphiste, d'une enseignante orientaliste, d'un écrivain et d'un maître zen. Tous se sont penchés sur les formules et les expressions que je leur soumettais, tous y ont réagi à partir de leur univers. Ces contributions m'aident à trouver le sens de telle ou telle *faute* d'élèves, ou à synthétiser différents exemples... Que chacun qui m'a ainsi aidée, qu'il en soit conscient ou non, se trouve ici remercié.

Les math: une langue pour les yeux

Il n'y a pas moyen d'articuler un discours sur les mathématiques qui ait pour ambition de comprendre ce qui se passe en math. Parler de math sans en faire n'a pas de sens. Aussi je vous invite à prendre bic et papier pour réfléchir à la situation suivante:

Prenez un nombre (de 1 à 10, c'est amplement suffisant).
Multipliez-le par 2.
Soustrayez 6.
Divisez par 2.
Ajoutez 3.
Vous retrouvez le nombre initial. Pourquoi?

Un rapide regard sur les feuilles de vos voisins* vous montre combien les écritures sont variées pour exprimer le même enchaînement.

Regardons tout d'abord:

$$7.\,2 = 14 - 6 = 8 : 2 = 4 + 3 = 7$$

Cette écriture suit le cours de l'élaboration du problème. C'est une écriture qui se déroule dans le temps, au rythme de l'énonciation. C'est l'écriture spontanée, celle qui colle au plus près de la mise en oeuvre du problème. Elle a deux inconvénients: l'égalité sert à écrire un résultat *partiel*: $7.\,2 = 14$ et l'opération est oubliée dans le résultat 14 (l'attention se porte sur le nombre du résultat partiel, et non pas sur l'opération à faire). Une lecture globale dans laquelle ce qui est à gauche et à droite du signe égal ont la même valeur, n'a ici aucun sens: $7.\,2 = 14 - 6$!! Pour que les égalités soient respectées, il faudrait alourdir l'écriture de parenthèses:

$$(((7.\,2 = 14) - 6 = 8) : 2 = 4) + 3 = 7$$

De plus, en arrivant au 7 final on n'a plus trace des opérations par lesquelles on est passé.

L'écriture:

$$\begin{aligned} 7.\,2 &= 14 \\ 14 - 6 &= 8 \\ 8 : 2 &= 4 \\ 4 + 3 &= 7 \end{aligned}$$

évite les embûches de l'écriture précédente en répétant les résultats partiels (...qui ne sont pas nécessaires à la compréhension du processus).

L'écriture :

$$
\begin{array}{l}
7 . 2 = 14 \\
\quad\quad\;\; \underline{- 6} \\
\quad\quad\quad 8 : 2 = 4 \\
\quad\quad\quad\quad\quad + 3 = 7
\end{array}
$$

garde trace des opérations. Les égalités n'y ont clairement qu'un sens local. Les résultats partiels sont aussi mentionnés, mais pas répétés.

On peut ainsi observer les avantages et les inconvénients de chacune des écritures en fonction du but assigné, c'est-à-dire de répondre à la question : *Pourquoi retrouve-t-on le nombre initial, quel qu'il soit ?*

Parmi toutes les écritures présentes dans une assemblée comme la nôtre, l'écriture

$$\frac{\square . 2 - 6}{2} + 3 = \square$$

qui pour des raisons typographiques s'écrit habituellement

$$\frac{x . 2 - 6}{2} + 3 = x$$

a le plus d'avantages 1) :

- les opérations y sont mentionnées sans qu'on ne soit encombré par les résultats partiels - aussi leur neutralisation saute aux yeux (multiplier, puis diviser par 2, enlever 6 demis et ajouter 3),

- l'égalité est respectée... et c'est justement elle qui est si étonnante : le nombre après manipulation est le même qu'avant manipulation,

- le nombre lui-même ne doit même pas être mentionné puisque l'énoncé est vrai pour tout nombre.

L'écriture mathématique dit tout...mais si la richesse d'abstraction dynamique n'a pas été mise en parole (un regard qui se dit), cette écriture qui dit tout...ne dit plus rien.

Cette écriture est celle choisie en math précisément pour ces avantages : les mathématiques transforment des quantités au moyen d'opérations en s'intéressant plus au jeu des opérations qu'au résultat, au processus qu'aux nombres engagés.

On ne peut adopter cette écriture que quand on comprend ses avantages, ce sur quoi elle met l'accent. Que dans chaque groupe d'enfants, de professeurs, ou de chercheurs cette écriture ne paraisse que très rarement semble indiquer combien peu ses avantages (par rapport à un certain but) sont mis en évidence par comparaison avec d'autres écritures. Cette écriture de synthèse dit tout... mais si la richesse

1) Si on désigne par *avantage* l'efficacité et la capacité de synthétiser les données recherchées par les mathématiques.

2) Un ami relisant mon texte s'exclame: pourquoi enlever 3x à gauche puisqu'il n'y en a pas à gauche!! Cette remarque est une perle: une exclamation qui met en lumière toute la difficulté de l'égalité comme opération.

3) Il y a quelques années je caractérisais ces perceptions de visuelle (globale) et auditive (qui se déroule dans le temps). Je me suis rendu compte depuis qu'un musicien (auditif s'il en est) déroule sa musique tout en la connaissant d'une pièce, totale en un instant, et aussi que la vision en mathématiques est au-delà de la perception. Il ne s'agit plus pour moi d'une opposition (ce à quoi les mots auditifs et visuels font penser) mais d'une dynamique mettant l'accent sur le lien entre les deux.

d'abstraction dynamique n'a pas été expliquée, n'a pas été verbalisée, mise en parole (un regard qui se dit), cette écriture qui dit tout... ne dit plus rien. Elle devient hermétique, traumatisante, fermée: toute de clarté (rien n'est caché), cette écriture est pour beaucoup d'un obscurantisme quasi macchiavélique. Nous n'en sommes pas à notre premier paradoxe en regardant fonctionner (ou dysfonctionner) les maths d'un peu plus près!

Je voudrais citer à présent un type d'erreur qui montre ce qui peut se passer quand la phrase mathématique est lue selon les lois de la langue familière à laquelle elle semble emprunter ses symboles et son vocabulaire, c'est-à-dire lorsqu'elle est lue de gauche à droite par un lecteur qui glâne ses informations les unes après les autres, au fur et à mesure que s'écoule le temps de sa lecture, sans tenir compte des lois propres aux opérations mathématiques (ici l'égalité).

Face à

$$7x + 3 - 2x = 3x - 5$$

Solange dit

$$7 - 2 + 3 \quad x$$

puisque l'idée est de cumuler les x. Elle a lu la phrase mathématique de gauche à droite, et tout en la lisant elle y glânait les x. Elle en a donc trouvé 7, puis -2, puis 3. Sa lecture est celle d'une perception linéaire qui se déroule avec le temps, alors que les mathématiques s'adressent à un temps arrêté. Il s'agit de percevoir la phrase globalement avec trois opérations: +, - et =. Il s'agit de percevoir que dans

$$7x + 3 - 2x = 3x - 5$$

3x est à droite. Aussi j'enlève 3x à droite et à gauche 2) pour trouver

$$7x - 2x - 3x + 3 = -5$$

ç.-à-d.

$$2x + 3 = -5$$

J'attribue ce type d'erreur à une perception de type linéaire (se déroulant dans le temps de la lecture) plutôt que globale 3). Dans les deux perceptions on regroupe les x ensemble et les nombres ensemble, mais dans l'une la place occupée compte. Les phrases mathématiques demandent à être vues globalement pour que saute aux yeux les opérations. Ce n'est qu'après que l'on regarde ce sur quoi portent ces opérations.

Je rappelle aussi la remarque de Hans Stoks, anthropologue, qui observait que notre *détermination culturelle d'Occidentaux range l'addition et la soustraction dans l'ordre du faire, l'égalité dans l'ordre de l'être. Peut-être que Solange ne comprend pas qu'il y a du faire dans l'être.* Et de nous rappeler qu'en langue maasaï comme en russe il n'y a pas de mot pour *égalité*. On y dit *ceci cela*: sans *est* ou *égal* entre les deux.

Voir en mathématiques veut tout d'abord dire utiliser ses yeux

Il y a lieu de distinguer

$$2x,\ x^2 \text{ et } \frac{x}{2}$$

Cette remarque fait sourire..., elle est pourtant essentielle et nécessaire : à quoi imputer sinon à un manque de discernement dans la vision des erreurs telles que

$$3\ (x + y)$$

remplacé par

$$3\ x + y:$$

l'élève a entendu, il n'a pas vu. Continuer serait nous engager dans une classification des erreurs en math qui, bien que riche, n'est pas notre propos. Il est toutefois important de noter la part très importante jouée par les yeux en mathématiques.

Voir, c'est reconnaître

Voir ce n'est pas que utiliser ses yeux, même pour discerner x^2 de $2x$, $3\ (x + y)$ de $3x + y$,... Dans ce discernement intervient aussi de la *reconnaissance* : reconnaître que

$$x^2 \text{ signifie } x\ .\ x$$
$$2\ x \text{ signifie } x + x$$

reconnaître que dans $3\ (x + y)$, à cause de la parenthèse, il y a lieu de distribuer le 3 sur le x et l'y, c'est-à-dire $3x + 3y$.

Signalons que l'utilisation de la lettre x pour désigner ce dont on parle (*l'inconnue*) en mathématique est un handicap pour beaucoup. Au lieu de comprendre que cette croix désigne une quantité à trouver par le biais des opérations et conditions auxquelles elle est soumise, beaucoup d'élèves en plein naufrage du sens s'agrippent à ce qu'ils peuvent : une lettre est une bouée, à laquelle ils se raccrochent en croyant retrouver l'alphabet. Or x n'a pas en math de valeur comme 24ème lettre de l'alphabet. C'est plutôt un signe à regarder comme croix-signature des analphabètes : elle désigne une présence, non visible, elle marque une place dans une dynamique opératoire. Ce que l'on observe, ce sont les lieux où la même lettre apparaît, à quelle hauteur dans l'écriture de la phrase.

Dans l'utilisation des *formules*, le fait de **reconnaître** est important. Face à la formule

$$a^2 - b^2 = (a - b)\ (a + b),$$

celui qui doit transformer

$$9\ a^4\ b^6 - 25\ a^8\ b^2$$

en un produit sera irrémédiablement bloqué s'il *reconnaît* les *mêmes* a et b dans la formule et dans l'énoncé de son exercice. Comme ils n'occupent pas les mêmes positions, accentuer la similitude des lettres mène directement à un chaos inextricable.

Par contre celui qui observe que $9\ a^4\ b^6$ est le carré de $3\ a^2\ b^3$ et que $25\ a^8\ b^2 = (5a^4\ b)^2$ (transformation de l'énoncé pour qu'il

4) André Simon et moi-même nous cherchons une expression purement graphique qui induise le jeu dynamique des formules mathématiques sans se charger des inconvénients classiques.

Nous sommes partis de:

$$\square^2 - \triangle^2 = (\square - \triangle)(\square + \triangle),$$

où les formes choisies (carré et triangle) ont l'avantage d'inviter à mettre des choses dedans. Ce sont des places libres dont le contenu est à désigner spécifiquement. Une seule contrainte: toujours le même contenu dans tous les triangles, toujours le même contenu dans tous les carrés.
Cette expression met en évidence le côté dynamique de la factorisation, mais la mémoire s'y accroche mal sauf chez les êtres dont le sens visuel est très développé. C'est alors que l'expression

$$a - b = (a - b)(a + b)$$

peut être proposée: on sait alors que les lettres désignent des places à remplir (par d'autres lettres ou nombres), on ne s'y arrête plus. Comme on peut prononcer cet enchaînement de lettres, la mémoire auditive intervient, accompagnée de la mémoire visuelle qui garde la trace des parenthèses.
Par curiosité nous cherchons des graphismes qui disent autrement les formules mathématiques tels que:

Arriverons-nous à recréer ainsi toutes les formules, avec cohérence de l'ensemble? Qu'importe puisque chaque difficulté rencontrée dans notre recherche recèle un enseignement précieux sur ce que les formules écrites avec des lettres cachent.

corresponde à ce que l'on veut reconnaître), celui-là utilise la formule dans ce qu'elle a de dynamique: une différence de carré, et factorise immédiatement: «le premier moins le second multiplié par le premier plus le second», ici:

$$(3\,a^2\,b^3 - 5\,a^4\,b)\,(3\,a^2\,b^3 + 5\,a^4\,b)$$

Les a et les b de la formule n'ayant pas valeur de lettre au sens d'insertion dans une phrase comme les lettres de l'alphabet, elles sont simplement utilisées comme symboles pour désigner une place à occuper. A ce titre on utiliserait avantageusement

$$\square^2 - \triangle^2 = (\square - \triangle)(\square + \triangle)$$

au lieu de $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$,

mais la typographie en est plus difficile et donc les coûts des manuels plus élevés. Rien n'empêche pourtant l'enseignant de désalphabétiser de temps en temps les symboles qu'il utilise en math pour que la dynamique opératoire soit mise plus en évidence. 4)

La formule math fait écran: elle est barrière qui prend la place du réel pour celui qui voit sans reconnaître. Elle est relais qui mène au réel pour celui qui entre dans la dynamique reconnue.

Notons qu'il n'y a que les élèves qui ont utilisé les ressemblances des lettres a et b dans l'énoncé de la formule et dans celui de leur exercice, qui ont pu apprendre que cette ressemblance était inopérante et donc non significative. Je pense à Einstein qui avait été mauvais élève et dit plus tard: *Créer c'est refuser de voir trop vite les ressemblances qu'on désigne.*

Le geste de la vision

Isabelle Stengers a porté mon attention, au-delà des signes, sur les gestes impliqués par la reconnaissance d'une formule comme applicable à un énoncé particulier: retrouver dans

$$(3\,a^2\,b^3)^2 - (5\,a^4\,b)^2$$

le fonctionnement de $\square^2 - \triangle^2$ ou $a^2 - b^2$ signifie un geste

$$\underbrace{(3\,a^2\,b^3)}_{a}{}^2 - \underbrace{(5\,a^4\,b)}_{b}{}^2 =$$

Celui qui reconnaît que $3\,a^2\,b^3$ occupe ici la place du a de la formule et que $5\,a^4\,b$ occupe la place du b de la formule, fait une association, un geste. *Ce geste opéré par la vision* montre combien en math le geste, intégré au voir, est *sémantique*, constitutif du sens et de la langue. *Le geste crée de l'image dans le temps: espace et temps. La règle intégrée est devenue ton geste* (Isabelle Stengers). 5)

Dans l'enseignement secondaire on pratique souvent la méthode dite du *drill*: répétition-annonation où un exercice simple est repris en changeant les coefficients, puis les exemples *se compliquent* graduellement, toujours avec répétition dans des exercices semblables. Cela m'étonne toujours que l'on puisse penser qu'en anesthésiant l'attention, l'éveil d'un enfant on le mène à penser. Il ne s'agit pas de répéter, mais de reconnaître. Il y a là nécessité d'une vitalité, d'une concentration menant

Il ne s'agit pas de répéter, mais de reconnaître. Il y a là nécessité d'une vitalité, d'une concentration menant au *aha*.

au *aha*. Pour cela il faut avoir intégré la pratique d'une gestuelle non nécessairement disponible par la répétition, sauf pour ceux qui, disciplinés et confiants, comprennent la répétition comme le musicien qui fait ses gammes ou le danseur à la barre. Cet éveil ascétique n'est pas le fait du grand nombre! Beaucoup ont besoin qu'on leur pose les jalons, qu'on leur fasse prendre connaissance des étapes par un échange qui met l'accent sur les étapes à franchir.

Tant qu'on annone une règle, poursuit Isabelle Stengers, *elle n'est pas intégrée comme une clé entre soi et un possible. La formule ouvre un possible...puis on lutte pour incarner le possible devenu appât.*

Voir est vision d'un possible

Pour expliciter cette manipulation animée par le désir de reconnaître, je pense à l'exemple cité plus haut, et aussi aux équations du cercle. Je suis sûre que je trouverai dans un avenir proche un exemple qui tout en étant aussi étonnant quant à la complexité de la manipulation à faire serait plus accessible. En attendant rappelons que l'équation d'un cercle de centre (a, b) et de rayon r est

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Impression étrange circulant le long de ma colonne vertébrale et alourdissant mon poignet: je perds mon auditoire par cette seule phrase. D'où vient-elle? Que veut-elle dire?

Si seulement vous pouviez 6) la prendre pour un fait et porter votre attention sur la question comment je retrouve une phrase de ce type dans l'expression:

$$x^2 - 6\,x + y^2 - 4\,y = 12$$

Pour retrouver le cercle dont il s'agit, on se base sur les puissances de x et de y. On *arrange* les termes indépendants ensuite

5) Je prends note ici de la remarque faite par Hans Stoks, anthropologue, qui nous montrait combien il serait plus adéquat de parler de rituel que de langage pour les mathématiques. Dans les math comme dans les rites il y a transcendance du langage naturel, jeu et obligations: on se soumet volontairement au rituel dont on doit respecter les règles. De plus, les mathématiques sont une activité où le sens est dans le faire: faire est signifier, faire est sémantique...

Ce point que je pressens depuis un an m'est encore fragile. J'avais jusqu'ici associé rite et croyance, je n'ai jamais associé math (expérience toute dans le faire, donc personnelle) et croyance. Hans Stoks, John Lagerwey et Therese Schroeder-Sheker m'amènent à recomprendre la notion de rite: c'est là le prochain but de mon travail. Qu'ils soient remerciés d'allumer quelques lumières sur ma route.

6) *Si seulement vous pouviez*. Une exclamation, une expression de désir souvent entendue parmi ceux qui présentent les mathématiques aux non encore *initiés*. Ceux-ci ont généralement le regard si mal orienté: ils se cabrent, se tendent, paniquent, s'inquiètent du sens de chaque lettre -sage interrogation en soi mais équivalente ici à regarder

l'arbre qui cache la forêt. L'équation du cercle n'a pour but ici que de donner une structure à laquelle on fera référence pour trouver dans d'autres expressions le centre et le rayon du cercle par comparaison. La comprendre en soi est louable mais ici inutile. Pourtant, tous ceux qui sont invités à l'utiliser sans la comprendre restent bloqués. Il pourrait ne s'agir que d'une anecdote locale à cet exposé. Je m'y arrête pourtant vu l'importance de cet écart de perception entre l'élève qui reste bloqué sur le sens initial en deçà de ce que le professeur veut montrer, et le professeur. Dans les classes dites faibles en math cet écart devient dramatique. Le professeur ayant peu d'heures de cours veut armer ses élèves en leur donnant des trucs, des raccourcis qui leur permettent d'agir sans comprendre le sens initial. En grande majorité c'est l'échec : non parce que les élèves sont bêtes (je n'ai pas encore rencontré quelqu'un incapable de faire des math) mais parce qu'au plus les élèves ont des difficultés à rentrer dans l'univers mathématique, au plus l'accompagnateur doit porter son attention sur les premiers pas, les significations de base, les conventions... Les trucs ne sont valables que pour ceux qui comprennent sans trucs et inventent le truc eux-mêmes. Pour les autres c'est un moyen sûr de magiciser les math... rien d'autre ! (la mathémagie !)

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 - 9 - 4 = 12$$
$$((x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9))$$
$$\text{ou } (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25.$$

Il s'agit du cercle de centre (3, 2), et de rayon 5.

Cette manipulation est quelque peu envolée, aussi je ne m'attarde pas sur cet exemple. Ceux d'entre vous qui l'ont compris, savourent mieux à présent le sens du possible devenu appât. Reconnaître qu'il n'y a que des x^2 et y^2 de même coefficient, des x et des y mais pas de xy incite à la transformation faite plus haut pour connaître le centre et le rayon du cercle.

Ceux qui n'ont pas suivi ma manipulation ont aussi perçu que seule une manipulation donne à reconnaître la formule. Mais chez eux ce message est alourdi de la conviction que *c'est si compliqué tout cela* qu'il vaut mieux ne même pas essayer. Dorénavant chez eux (et surtout chez les élèves de ce type) le message immédiat perçu par une phrase telle que

$$x^2 - 6x + y^2 - 4y = 12$$

sera plutôt : *Compliqué, t'aventure pas* (et de là à ne plus voir il n'y a qu'un pas !) plutôt que : il y a un cercle là-dessous.

Se rendre disponible pour voir

Ce qui précède met en évidence la dimension éminemment personnelle du voir en mathématiques : les émotions, les rejets, les tensions, les peurs handicapent le voir, ç.à.d. la perception et donc la compréhension. A vouloir trop voir on ne voit plus !

A ne pas vouloir voir on ne voit pas non plus ! Jérôme, un jeune de 20 ans, me disait : *Pour que les élèves voient, il faut qu'ils veulent bien voir.* Il me décrivait aussi les étapes par lesquelles il était passé pour comprendre les équations différentielles. On y retrouve dans l'ordre : volonté et application, tâtonnement, repos confiant et abandon, reprise, *ça y est* (n'y a-t-il pas là analogie avec les étapes de progression intérieure décrites par les mystiques ?). *J'ai dû d'abord faire un travail par moi-même avec ce que j'avais. Je cherchais dans le flou sachant seulement que la question essentielle devait arriver... Puis il a fallu que ça mûrisse dans ma tête : ça travaille tout seul même quand je ne suis pas penché dessus. Enfin je suis revenu à ces équations et j'ai été surpris de saisir bien des choses. Pour finir, le prof a mis tout en place en deux coups de cuillères à pot.*

Nous avons vu plus haut combien le geste était intégré à la reconnaissance d'une formule au point que Isabelle Stengers peut dire : *La règle intégrée devient ton geste.* Les mouvements du corps qui lui assurent aisance et souplesse interviennent aussi dans la compréhension -songeons aux cent pas que nous faisons en réfléchissant, au désir de se blottir pour mûrir une pensée ou à la position que nous adoptons pour écouter, réfléchir, exprimer... Je me souviens de Myriam (elle avait 14 ans). Lors d'une séance de math elle se plaignait sans cesse de son coxis, aucune position ne lui était confortable... Inutile de dire qu'elle ne comprenait rien en math. J'ai fini par lui demander dans quelle position elle se sentirait à l'aise, et nous nous sommes retrouvées à plat ventre sur le tapis, un bloc de papier et des feutres devant nous. Etait-ce sa position, ou d'avoir mis son prof de math au tapis, mais Myriam est devenue brillante. Déliée dans ses gestes, sa pensée était rendue fluide et disponible.

Ces remarques de type *personnel* montrent l'importance d'une certaine qualité de centration (être centré) pour avoir accès aux mathématiques.

En donnant l'impression de ne pas parler des mathématiques elles-mêmes, j'observe les phénomènes dits *périphériques* qui peuvent ou non en empêcher l'accès. Dans ce travail de sens, d'épistémologie... je suis passeur (celle qui aide à aborder les math, à y entrer) et observateur.

Faire des math : voie d'éveil

Je suis ainsi amenée à mettre l'accent sur l'engagement personnel : il n'y a de math que dans le faire (des mathématiques), il n'y a pas d'autre savoir que celui du faire, pas de mémoire, pas de par coeur, pas d'argumentation autre que celle du faire.

J'ai eu ces derniers mois l'occasion de travailler avec Solange, dame de 55 ans hyper-bloquée au départ. Depuis sa jeunesse, Solange est traumatisée par les math. Elle a eu le courage de me téléphoner et de travailler des problèmes mathématiques (menant aux équations du 1er degré), parce qu'elle avait la certitude intérieure de pouvoir, par les mathématiques, trouver un accès à l'ordre du monde. Dans sa vie relationnelle et mondaine elle a été déçue par trop de mirages, par trop de *réels* qui les uns après les autres se sont avérés illusoires. Aussi elle cherche un réel plus simple, inscrit en elle. Elle a décidé de plonger dans les math parce qu'elle cherche une cohésion intérieure par la rencontre avec un système cohérent. Elle n'a pu réaliser ceci et le dire qu'après six séances d'exercices mathématiques. Quarante ans de peur assurent des blocages bien solides et très lents à accepter de céder la place à un autre possible : on finit par tenir à son incapacité !

Travailler avec Solange est pour moi une mine inouïe d'observations. Elle est quelqu'un qui résiste énormément aux changements, au langage technique, quelqu'un avec qui les moindres étapes doivent être mises en lumière et verbalisées. Nous apprenons toutes deux énormément de ce travail ensemble. Je voudrais citer ce qu'elle m'a dit stupéfaite :

7) Initiations, numéro 1, sept. 1989, p.24 ss.

Quand je travaille ces équations, je ne retiens rien par coeur. Pour moi c'est étonnant : j'ai l'habitude de lire et de retenir. J'avais peur de faire les exercices en croyant que je les retiendrais par coeur à la première lecture et puis que je ne saurais plus réfléchir... et non : rien. A chaque fois que je reprends un énoncé, même si je l'ai déjà résolu auparavant, je ne me souviens de rien, c'est toujours neuf.

Et deux jours plus tard, Donalee, 14 ans, me disait la même chose. Elle venait de découvrir qu'une fois qu'elle se mettait à chercher et comprenait en géométrie, quelque chose en elle pensait, s'articulait, réfléchissait, mais que la mémoire qu'elle avait jusque là utilisée pour répéter ces choses incompréhensibles ne jouait plus le même rôle.

Dès que l'élève s'invite à *faire des math* - cela ne peut se passer qu'en lui-même : une sorte de *aha* intérieur, *il y a une piste pour moi ici, quelque chose auquel je peux participer*- il découvre en lui-même une dynamique de réflexion, d'essais, d'hypothèses, de questions. C'est là où pour moi les mathématiques commencent : là où *je* participe totalement au processus d'élaboration toujours créateur des mathématiques (ç.à.d. *je* fais des math, et *je* est construit par les math). Aussi l'erreur est essentielle : elle est la trace de ce *je* participant. Sans erreur, les math sont un discours-machine. Les erreurs signalent le lieu où en est leur auteur, les modèles inadéquats qu'il utilise, les connotations langagières inappropriées,...

Pour moi, les mathématiques sont le langage du peintre si on lui enlevait ses pinceaux et ses huiles. Etre au coeur du vivant et l'exprimer... sans moyens.

« Aha »...un miracle

Voir en mathématique c'est être saisi, c'est faire l'expérience du *aha* (je détaille ce point dans un compte-rendu d'ateliers sur un problème particulier où je mets en lumière combien les mathématiques sont un lieu privilégié où s'opère le travail du deuil 7).

Mais il n'est pas naturel de saisir, de *voir* en mathématiques : c'est un miracle qui pour être reproductible n'en est pas moins un miracle. L'accompagnateur qui croit que l'expérience de la vision est immédiate, induit un traumatisme. En effet, on ne voit que quand cela a du sens... et le sens est sémantique.

Voir est illumination

L'expérience du voir en/par les math est irréversible (on ne sait plus après comment on pensait avant), immédiate, tranchante. Un éclair, et le monde change. Il reste à exprimer, à articuler, mais la saisie est là, une certitude est présente.

En math, le langage donne à voir...puis le voir donne à parler. Mais à une condition...c'est de s'investir dans ce langage, qu'il soit la trace d'un faire. Ce qui valide totalement l'erreur comme partie intégrante du processus.

Conclusion

En guise de conclusion je voudrais passer en revue les aspects visuels des mathématiques.

1. Les mathématiques sont un langage visuel, hyperconventionné ce qui amène à une grande liberté au sens où les Japonais entendent le mot *dô* (la voie): passage par une discipline. 8)

2. Il faut dépasser le visuel: ce n'est pas là que ça se passe. Les mathématiques sont l'occasion d'un travail du deuil.

Prendre conscience qu'une formule n'est pas un énoncé symbolique; ce ne sont pas les symboles qui comptent mais la dynamique opératoire.

La vue, ce n'est pas l'organe des yeux, mais l'abstrait derrière les yeux.

3. Le regard en math est chargé de savoir: on ne peut voir que quand il y a une structure de sens derrière le regard. On voit parce que l'on sait et que l'on reconnaît ou parce que l'on cherche dans cette direction-là (On *voit* aussi parce que l'on aimerait qu'il en soit ainsi. Oh les belles erreurs dont l'histoire des math n'est pas dépourvue!). Apprendre à quitter le désir pour voir.

4. Un travail en mathématiques fait prendre conscience des charges (culturelles) du regard et autorise donc à se positionner librement par rapport à elles et à en jouer. Le regard devient ainsi pleinement l'organe de la mise à distance. J'ai toujours été frappée de voir combien les mathématiques interrogent la pensée, au point qu'une expérience de mathématiques réussie est une expérience de philosophie.

5. Voir est rencontre: aussi il y a le moment juste, ni trop tôt, ni trop tard, et l'attitude correcte.

6. Y a-t-il une genèse du voir? Ayant attribué beaucoup de qualificatifs visuels aux mathématiques, je me suis adressée à Richard Baker, maître zen (discipline d'illumination). Je m'attendais à ce qu'il me parle du voir, il m'a parlé de son expérience et m'a dit comment face à chaque problème qui s'adresse à lui, il agit avec

8) Le rapport que j'évoque ici entre discipline et liberté, voie ascétique et être au coeur de la vie, est exprimé par le peintre chinois Shih-t'ao, cité par François Cheng dans *Vide et plein. Le langage pictural chinois*, Paris (Seuil), 1979, p. 101: *L'Oeuvre* (en peinture (...et en math)) *repose, en vérité, sur le principe de la Disipline et de la Vie: par l'Un, maîtriser la Multiplicité; à partir de la Multiplicité, maîtriser l'Un. L'oeuvre véritable se fonde sur sa propre substance.*

Ce peintre (de la dynastie des Ts'ing, XVIIe s. au XIXe s.) exprime l'apogée de ce qu'est l'expérience de peindre, quand l'Oeuvre se réalise sans les artifices de sujets ou de moyens. Il en est de même pour l'expérience de faire des mathématiques.

J'ai souvent dit que pour moi les mathématiques sont le langage du peintre si on lui enlevait ses pinceaux et ses huiles. Etre au coeur du vivant et l'exprimer...sans moyens.

la même attitude: *I put a gentle pressure on it.* Pour lui, la résolution d'un problème a sa génèse dans l'énergie (la concentration) que l'on a appliquée pour le résoudre. Cette énergie donne naissance à une visualisation qui aboutit au langage.

7. Enfin, il importe de constater que dans tout ce qui précède, aucune connotation morale, jamais n'a été nécessaire: les math sont de l'ordre du jeu. Même s'il leur arrive de donner naissance à des processus efficaces, il est temps de ne plus s'y tromper et de s'autoriser au plaisir du jeu sans le poids de la morale ou de l'autorité. En mathématiques il n'y a pas plus de vérité dans $a^2 - b^2$ que dans $(a-b)(a+b)$: une expression est plus appropriée que l'autre pour un usage particulier, c'est tout.

Beaucoup d'élèves tenus en échec par les math ne souffrent pas d'incapacité en mathématiques. Ils sont le plus souvent traumatisés par l'autorité exercée sur eux par celui qui a la clé infaillible du juste et du faux, le *prof* de math. Comprendre les math les rend autonomes, leur permet de se libérer de ce carcan pour devenir acteurs.

J'ai parlé de deuil, d'illumination, de quitter le désir pour voir: beaucoup d'entre vous y reconnaissent un vocabulaire mystique que j'utilise en pleine connaissance. Les mathématiques se sont avérées pour moi et dans l'accompagnement de mes élèves être une aventure spirituelle, un chemin d'initiation.

En rangeant des livres dans notre bibliothèque j'ai laissé tomber l'un d'eux. En le ramassant je l'ai feuilleté: quelle joie de lire ces lignes dans *Le visible et l'invisible* de Merleau Ponty 9): *On peut effectuer le passage (entre la chose et les pré-choses flottantes) en regardant , en s'éveillant au monde, on ne peut pas y assister en spectateur* (un regard qui se nourrit du travail de deuil). *(...) c'est une métamorphose par laquelle les apparences sont instantanément déstituées d'une valeur qu'elles ne devaient qu'à l'absence d'une vraie perception. Ainsi la perception nous fait assister à ce miracle d'une totalité qui dépasse ce qu'on croit être ses conditions ou ses parties (...)* (le aha!). *Mais pour les déplacer comme elle fait, il faut que la perception garde dans sa profondeur toutes leurs relevances corporelles: c'est en regardant, c'est encore avec mes yeux que j'arrive à la chose vraie, ces mêmes yeux qui tout à l'heure me donnaient des images monoculaires: simplement, ils fonctionnent maintenant* **ensemble** ***et comme*** **pour de bon.** *Ainsi le rapport des choses et de mon corps est décidément singulier: c'est lui qui fait que, quelquefois, je reste dans l'apparence et lui encore qui fait que, quelquefois, je vais aux choses mêmes; c'est lui qui fait le bourdonnement des apparences, lui encore qui le fait taire et me jette en plein monde. Tout se passe comme si mon pouvoir d'accéder au monde et celui de me retrancher dans les fantasmes n'allaient pas l'un sans l'autre. Davantage: comme si l'accès au monde n'était que l'autre face d'un retrait.*

9) TEL Gallimard, 1964, p. 23.